TRIGONOMETRÍA PLANA . Conceptos básicos

En esta etapa lo que haremos es repasar los temas relativos a trigonometría con el objetivo de nivelar contenidos que han sido abordados en la escuela media con distinto grado de profundidad. Pero , entendemos como bueno que conozcas el porqué en tu carrera del dominio de esta temática a la cual pudiste darle relativa importancia por aquel entonces.

Hiparco de Nicea

*Si bien la trigonometría nació hace bastante tiempo, por el siglo II a. de C., cuando **Hiparco**[1] intentaba hacer de las observaciones astronómicas. un arte más exacto, nutriéndose la agrimensura, la cartografía, la navegación , etc., de esos conocimientos, uno podría preguntarse para qué interesa tanto su estudio en la época moderna. La explicación se encuentra en que las funciones seno y coseno resultaron ser **funciones periódicas**, esto es, la forma de la función en un intervalo se repite constantemente.*

*Uno puede preguntarse: "Y esa observación, ¿para qué sirve?" La respuesta inmediata es que muchísimos fenómenos de nuestro mundo son periódicos: el día y la noche, los latidos del corazón, el movimiento de la cuerda de una guitarra. Fíjense, que a pocos se les ocurre que la música puede estar ligada a la matemática: una se percibe como arte y la otra como un conjunto de símbolos extraños, para los que se definen operaciones ligados entre sí por razonamientos muy difíciles de entender para un artista musical. (¡ como si fuese fácil para el que no sabe música, ejecutar una partitura!). Sin embargo, a partir del análisis matemático del movimiento de una cuerda musical que vibra (**Brook Taylor, Siglo XVII**) se ve que el instrumento matemático con el que puede analizarse ese movimiento es el seno y el coseno, (periódicos). Los matemáticos descubrieron que cualquier función periódica podía expresarse como suma de senos y cosenos con coeficiente convenientes, dándose lugar al nacimiento del análisis armónico.*

Hoy, los métodos de exploración en medicina consisten en analizadores armónicos que envían ondas adecuadas hacia el corazón, de forma que sean capaces de interactuar selectivamente con los tejidos que se quieren "observar". Las ondas resonantes que se producen en tal interacción se analizan matemáticamente en una computadora, y ésta es capaz de enviar a una pantalla una imagen con bastante exactitud de, por ejemplo, las válvulas del corazón y su

---

[1] HIPARCO fue el observador más grande de la antigüedad, tanto que su catálogo estelar, que contenía posiciones y brillos de unas 850 estrellas, fue superado en precisión solamente en el siglo XVI. Su escala de los brillos aparentes, que distingue seis magnitudes, está en la base de la actual clasificación fotométrica de las estrellas. Por otra parte, hizo el notable descubrimiento de la precesión de los equinoccios, es decir, del desplazamiento de los puntos equinocciales –puntos comunes a la eclíptica y al ecuador celeste- a lo largo de la eclíptica. Para ello, procedió a desarrollar un método que anteriormente había sido ideado por Aristarco; midió la distancia y tamaño de la Luna. Por otro lado, inventó la trigonometría esférica que incrementó el potencial del cálculo; renovó las matemáticas, herramienta esencial de la cosmología, astrofísica y astronomía, a la que perfeccionó con nuevos instrumentos. Conocedor de la distancia y de los movimientos de la Luna y en posesión de una teoría mejor que la de sus predecesores acerca de la órbita solar, Hiparco pudo conseguir satisfacer una de las principales exigencias de la astronomía antigua: la predicción de eclipses, cuestión que para los griegos, antes de Hiparco, constituía un serio problema, ya que tan sólo contaban para desarrollar sus predicciones sobre eclipses con el método del saros de los babilonios.

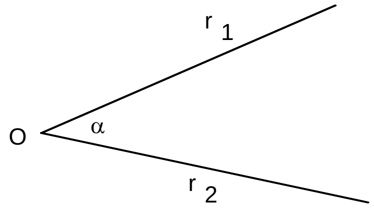
funcionamiento, conjuntamente con la presión sanguínea en un lugar adecuado, posibles daños en el tejido y su localización.

El mundo que vivimos está rodeado de ondas; la luz, el sonido, la electricidad, el electromagnetismo, etc. Todos ellos tienen un análisis matemático similar a la cuerda vibrante de la guitarra.

1. Ángulos y su Medición:

1.1: Introducción:

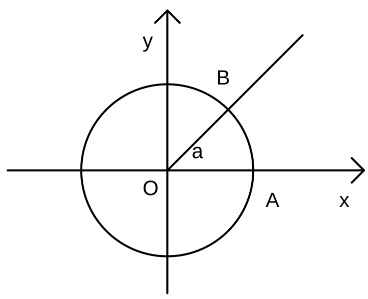
En la geometría elemental, el ángulo se define como una porción de plano limitada por dos semirrectas con origen común no haciendo distinción alguna entre los lados del ángulo.



Así $\alpha(r_1, O, r_2)$ es igual $\alpha'(r_2, O, r_1)$

Ahora intentaremos dar un concepto más general de ángulo, entendiendo al mismo como un ente **algebraico**, el que puede tomar valores positivos, negativos o nulo.

Consideremos un sistemas de coordenadas cartesianas (O, $\vec{x}, \vec{y}$) (ver figura) y, en él, una circunferencia de radio r con centro en O.



Esta circunferencia corta el eje $\vec{x}$ en un punto A. si B es un punto cualquiera de la circunferencia, le corresponde el radio vector, $\overrightarrow{OB}$.

Así, el ángulo $\alpha = \angle AOB$ lo consideramos generado por la rotación del vector $\overrightarrow{OB}$ desde la posición inicial $\overrightarrow{OA}$ hasta la posición $\overrightarrow{OB}$, en el sentido contrario al movimiento de las mancillas del reloj (antihorario). Llamamos:

a la semirrecta $\overrightarrow{OA}$: **lado inicial** del ángulo α (o semirrecta generatriz) , y

a la semirrecta $\overrightarrow{OB}$: **lado extremo** o final del ángulo α .

El ángulo α, será **positivo** si está generado por la rotación del vector $\overrightarrow{OB}$, en el sentido antihorario.

El ángulo α será **negativo** si el mismo está generado en el sentido horario.

Asimismo, debe observarse que a la posición $\overrightarrow{OB}$ *no le corresponde un mismo ángulo* α, ya que el vector $\overrightarrow{OB}$, gira en un principio en el sentido positivo generando el ángulo α, y después de ésto, puede girar cualquier número entero de revoluciones en sentido positivo o negativo, luego de lo cual su extremo queda posicionado en el mismo punto B. Esto significa que a la posición del lado extremo del ángulo le corresponden una infinidad de ángulos (positivos y negativos). Estos ángulos pueden obtenerse por la expresión:

$$\beta = \alpha + 360^\circ k \qquad \text{con} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ó} \quad k \in \mathbf{Z}$$

Ejemplo:

Un ángulo de 120° tiene la misma posición de sus lados que: $480^\circ, 840^\circ, 1200^\circ, -240^\circ, -600^\circ, -960^\circ$, etc.

O podemos expresar que si $\alpha = 120^\circ$, entonces todos los ángulos enumerados están contenidos en la expresión:

$$\beta = 120^\circ + 360^\circ k \ , \quad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

(*Intenta dibujar los ángulos para verificar lo que se afirma*)

1.2 .-Sistemas de medición

Para medir un ángulo, debemos contar con una unidad de medida. Recordemos que medir es comparar. Luego, puede parecer natural considerar al ángulo recto como unidad, pero, a los fines prácticos es una unidad muy grande. Así, entonces, los sistemas de medición de ángulos más usados son:

a) sistema sexagesimal
b) sistema radial o circular

a) Sistema sexagesimal:

En el sistema sexagesimal, la unidad de medida es: el **grado** el cual se define como la 90 ava parte de un ángulo recto, y se lo nota por: **1°**. se llama **minuto** a la 60 ava parte de un grado, denotándoselo por **1'**, y se llama segundo a la 60 ava parte de un minuto, denotándoselo por **1''**.

Ejemplos:

- Un ángulo recto mide 90 °

- Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°cada uno.
- Para indicar que un ángulo mide 45 grados, 34 minutos y 28 segundos, escribimos brevemente: 45 ° 34' 28 ".
- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios , esto es, suman 90°. Si uno mide 25° 25' 25 ", el otro medirá: 90 ° - (25° 25' 25 ") = 64° 34' 35 ".

Nota

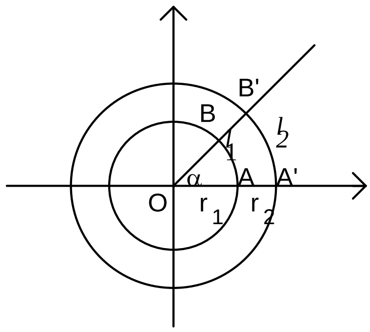
Una variante de la medición de ángulos en grados, es expresar a las fracciones de grados en notación decimal, es decir, dividirlas en décimos, centésimos, milésimos. Esto debe tenerse muy en cuenta cuando se usa la calculadora a efectos de "chequear" cuál es el modo en el cual se está usando . Por ejemplo, si la máquina te entrega un resultado de 0.35°.no se trata de 0 grado y 35 minutos, sno de un ángulo de 0 grado y 35/100 de grado, lo que equivale (por regla de tres) a un ángulo de ≅ 21'. A su vez, un ángulo de 35° 21' 14"≅35,3539 °.

Pero, por las distintas aplicaciones, el sistema que más utilizaremos por su conveniencia, será el:

b) Sistema Circular o Radial:

En el sistema circular, la unidad de medida de un ángulo es el **radián.**

Antes de definirlo, trataremos de observar lo siguiente:



Si con el origen en O, trazamos dos circunferencias (ver figura) de radios r_1 y r_2 vemos que a α le corresponden dos arcos: $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{A'B'}$, de radios OA = r_1 y OB= r_2 .

Si designamos con:

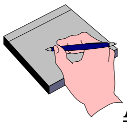
l_1: la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$

l_2: la longitud del arco $\overset{\frown}{A'B'}$,

fácilmente podemos ver que:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$

O sea, que los ángulos centrales de una circunsferencia son proporcionales a los arcos que comprenden.



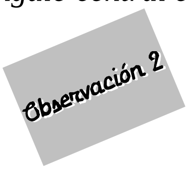
<u>Actividad 1</u>: Intenta probar que la razón señalada mas arriba es una constante que podemos llamar *a*, siendo $a = \dfrac{\pi\alpha}{180}$.

Como has podido comprobar, el valor da constante porque no varía si modificamos el radio de la circunsferencia que tomamos (cualquiera sea el radio, el resultado es siempre el mismo valor).
El número a = $\dfrac{\pi\alpha}{180}$, igual a la relación entre la longitud del arco *l* - correspondiente a cierto ángulo central- , y la longitud del radio r, se llama ***medida en radián del ángulo*** $\boldsymbol{\alpha}$**.**

¿Qué es entonces un radián ?.

Un **radián** es el ángulo que corresponde a una ángulo central de una circunferencia cuyo radio es igual a la longitud del arco.

En una circunsferencia de radio 1, la longitud del arco que subtiende un ángulo central es la medida en radianes del ángulo.



En el futuro cuando expresemos ángulos en radianes, no escribiremos "radianes" sino que ello se sobreentenderá. Llamaremos, por ejemplo: ángulo $\alpha = \angle AOB = 2.7$*, en lugar de* $\angle AOB = 2.7$ *radianes (obviaremos la unidad de medida) .*

Ahora bien, resulta muy útil saber realizar la conversión de un sistema a otro (que sus calculadoras lo hacen con solo modificar la tecla de modo).

Para encontrar la relación entre los sistemas sexagesimal y circular, razonaremos así:

Como la longitud de la circunferencia es: $l = 2\ \pi$ r, resulta:

$$360^{o} \longrightarrow 2\ \pi \text{ radianes}$$

$$1^{\circ} \longrightarrow \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}\text{rad} \cong 0.0174\text{ rad}\ .$$

$$\alpha^{\circ} \longrightarrow \frac{\pi}{180}.\alpha \ \ \text{rad.}$$

Luego basta multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$ la medida del ángulo en grados para obtener su medida en radianes.

Si por ejemplo: $\alpha = 38^{o}$ entonces la medida en radianes de α es:

$$\frac{\pi}{180} \cdot 38 = \text{..........} \text{ radianes.} \quad (\textit{Completa})$$

Y, la conversión de radianes a grados se hace así:

Si α mide <u>x</u> radianes, aplicando el mismo razonamiento anterior, su medida en grados es :

$$x^{o} = \frac{180}{\pi} \cdot x$$

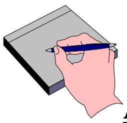
Particularmente, si α mide **1 radián,** entonces en grados α mide:

$$\frac{180}{\pi} \cdot 1 \cong 57^{\circ}\, 17'\, 44{,}8'' \cong 57^{\circ} 18'$$

(*basta con recordar que es un poco menor a un ángulo de* 60^{o}).

Importante

Usando el sistema de medición de ángulos por radianes, cada ángulo α *está representado por un número, donde* $0 \le x \le 2\pi$. *Y recíprocamente, cada número x del intervalo* $[0, 2\pi)$ *representa un ángulo.*



<u>Actividad 2</u>: Responde a las siguientes cuestiones:

a)¿Cuántos minutos hay en 45° 10'?

b)¿Cuantos radianes son 180^{o}? ¿y 90^{o}? ¿y 60^{o}? ¿y 45^{o}? ¿y 270^{o}? ¿y 90^{o}? ¿y 15° ? ¿y 36°?

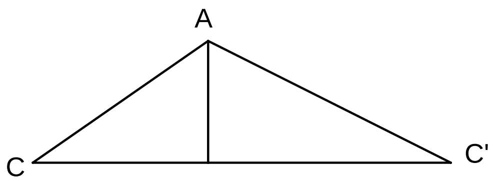
c) Cuantos grados son $\pi/6$ radianes ? ¿ y $\pi/2$ radianes ? ¿y 1,5 radianes ? ¿y 30,5 radianes ? y $3\pi/4$ radianes ?

d) Completa, *mentalmente*, la siguiente tabla:

Grados	0	30°			90°		135°	150°		240°		360 °
Radianes	0		$\pi/4$	$\pi/3$		$2\,\pi/3$			π		$5\pi/3$	2π

<u>Actividad 3:</u> Un ángulo que mide 1,5 radianes, ¿es menor, igual o mayor que un ángulo recto?. (*mentalmente*)

<u>Actividad 4</u>: Dos triángulos que tienen un cateto común, se pegan para formar un triángulo como el de la figura. Si el ángulo C mide 48° 31' y el ángulo C' : 21 ° 42', ¿Cuánto mide $\angle CAC'$?y en radianes?



<u>Actividad 5</u>: En una circunferencia de 10 cm. de radio, un arco mide : 6 cm. ¿Cuánto mide (en grados y en radianes) el ángulo correspondiente?

Actividad 6: Encuentre la medida en radianes de cada ángulo exterior de: a) Un triángulo equilátero, b) Un hexágono regular. b) Un heptágono regular.

Actividad 7: Si una cuerda de longitud igual a 4 m. subtiende un arco de 45º37´.Calcular el radio de la circunsferencia y la distancia del centro a la cuerda.

1.3.- Líneas trigonométricas de un ángulo

La trigonometría, etimológicamente, significa: *medida de triángulos.* Consiste en relacionar y hacer cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo.
Como lo dijimos en un comienzo, su estudio se extiende más allá de tales alcances y se torna imprescindible por sus aplicaciones que van desde la ingeniería, la navegación hasta las artes, como la música y la arquitectura.

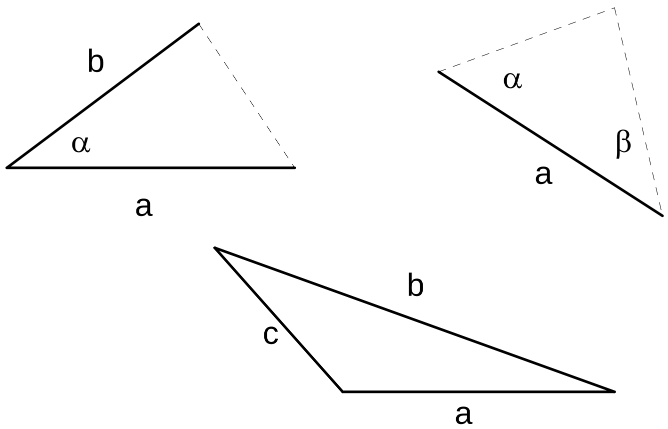
Antes de desarrollar este punto, conviene recordar de la geometría elemental que, para que un triángulo se determine (quede definido) es necesario fijar algunos de sus elementos. Entre los elementos que pueden fijarse, y que vale la pena tener en cuenta, se tiene los siguientes casos:

Un triángulo **queda determinado** si se conocen:

a) dos lados y el ángulo comprendido.

b) un lado y los lados ángulos adyacentes

c) sus tres lados



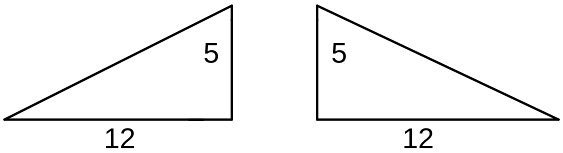
Esto significa -en cada caso- que, teniendo esos datos, pueden determinarse los demás elementos del triángulo que se trate.

Ejemplo: I) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 metros, ¿es único dicho triángulo? Si es así, queda determinado por esos elementos. Veamos:

Por el teorema de Pitágoras se garantiza que la hipotenusa es igual a:

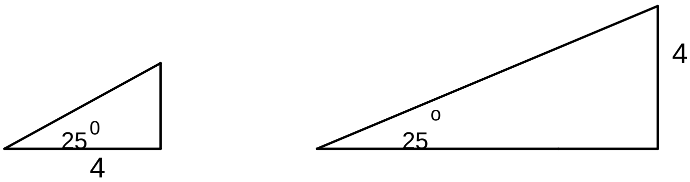
$$\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{169}=13$$

Luego, conocidos los tres lados del triángulo, sólo hay dos maneras de armarlo:



y, usando las transformaciones de traslación, rotación y reflexión podemos llevar uno en el otro, por lo tanto, son iguales.

II) De un triángulo rectángulo se conoce que un ángulo mide 35° y que un cateto mide 4 metros. ¿Podremos conocer el triángulo? No. Veamos la figura:



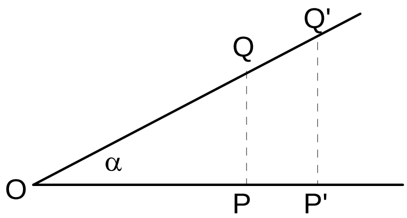
Estos datos *no determinan* un triángulo porque no es único el que se obtiene.

Resulta natural, por lo tanto, preguntarse de qué manera *determino* esos elementos. La respuesta a ese primer interrogante nos la dará la trigonometría.

Por ello, lo primero que tratamos fueron los sistemas de medición de ángulos.

Sea dado entonces, α un ángulo agudo.

Si elegimos P y P' sobre el lado inicial del ángulo α y, por ellos trazamos las perpendiculares a la misma, quedan determinados los puntos Q y Q' que dan origen a dos triángulos rectángulos: OPQ y OP'Q', que son obviamente semejantes por tener un ángulo α común.



Esto indica que sus lados son proporcionales:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \text{ constante}$$

y, por tratarse de triángulos rectángulos, los lados se distinguen en dos(2) catetos: cateto opuesto: **co** y cateto adyacente **ca** e, hipotenusa: **h**, por lo que a ésa constantes, que puede definirse como la razón: $\frac{co}{h}$ se la llama ***seno del ángulo α,*** denotándoselo como: ***sen α***.

Así:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{co}{h}}$$

como vemos, esta constante *no depende del punto* elegido, sino de α.

De la misma forma, se puede establecer que:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \text{constante} = \frac{ca}{h} = \textbf{\textit{coseno del ángulo ángulo }} \boldsymbol{\alpha} = \textbf{\textit{cos }} \boldsymbol{\alpha}\text{, ó:}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{ca}{h}}$$

Y,

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \text{constante} = \frac{co}{ca} = \textbf{\textit{tangente del ángulo }} \boldsymbol{\alpha} = \textbf{\textit{tan }} \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{co}{ca}}$$

De igual forma se definen:

$$\textbf{\textit{cotangente del ángulo }} \boldsymbol{\alpha} = \textbf{\textit{cotan }} \boldsymbol{\alpha} = \frac{ca}{co}$$

$$\textbf{\textit{secante del ángulo }} \boldsymbol{\alpha} = \textbf{\textit{sec }} \boldsymbol{\alpha} = \frac{h}{ca}$$

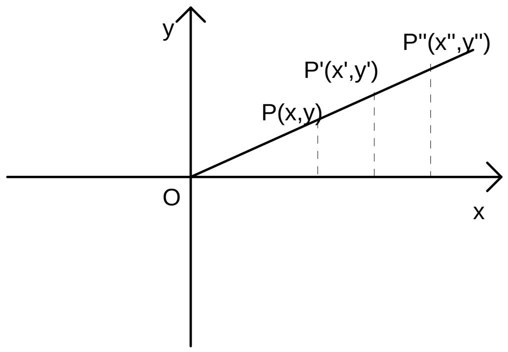
$$\textbf{\textit{cosecante del ángulo }} \boldsymbol{\alpha} = \textbf{\textit{cosec }} \boldsymbol{\alpha} = \frac{h}{co}$$

Luego de estas definiciones, queda claro que, conociendo algunos datos de los triángulos rectángulos, se pueden conocer los restantes elementos. No es nuestra intención- en este punto, resolver situaciones problemáticas de esta naturaleza, pero debe apuntarse que más adelante utilizaremos estos resultados para hacerlo.

Importante

Como estas definiciones corresponden solamente a un ángulo agudo, no puede hablarse de seno, coseno, tangente, cotangente, etc. de ángulos tales como -por ejemplo- de 0°, 90°, 120° etc., porque el ángulo de un triángulo rectángulo no puede tomar esos valores. No obstante, pueden darse unas definiciones de estas magnitudes de manera que ellas correspondan a cualquier ángulo α, lo que, inmediatamente haremos.

Sea, ahora, un punto cualquiera P(x,y) del plano cartesiano



De la forma hicimos con anterioridad (cuando el triángulo no estaba referido a un sistema de coordenadas cartesianas), podemos deducir -por semejanza de triángulos - que las razones:

$$\frac{y}{OP} = \frac{y}{OP'} = \frac{y''}{OP''} = \text{constante}$$

de modo que esas razones *solo dependen del ángulo orientado* que forma OP con el eje $\vec{x}$.

Observación

Existe cierta tendencia a confundir los entes matemáticos- por alguna razón quizás-, pero vale aclarar que ***no es lo mismo*** *hablar de un segmento que de la* ***medida de ese segmento*** *(el primero es un ente geométrico, el segundo algebraico). Por ello, cuando nos refiramos al segmento colocaremos* $\overline{OP}$ *, y cuando nos referimos a la longitud del segmento, colocaremos OP ó* $\left|\overline{OP}\right|$.

Lo dicho más arriba vale también para las razones: $\frac{x}{OP}$, $\frac{y}{x}$, etc., destacando una vez más que: x, y, OP, *son números abstractos*, por lo que estas razones son números abstractos.

Así, llamando: ρ = OP, se tiene la siguiente definición:

> ***Def***.: Sea P(x,y) un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que P no pertenece a ninguno de los ejes coordenados. Y sea α un ángulo orientado formado por OP, cuya medida es ρ . Entonces:
>
> $\text{sen}\,\alpha \underset{def}{=} \frac{y}{\rho}$ $\qquad$ $\text{cosec}\,\alpha \underset{def}{=} \frac{\rho}{y}$
>
> $\cos\alpha \underset{def}{=} \frac{x}{\rho}$ $\qquad$ $\sec\alpha \underset{def}{=} \frac{\rho}{x}$
>
> $\tan\alpha \underset{def}{=} \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\text{cotan}\,\alpha \underset{def}{=} \frac{x}{y}$

De esta manera, hemos definido las líneas trigonométricas de un ángulo cualquiera, ya que el punto genérico puede encontrarse en cualquier cuadrante (¡cuidado! nada se ha definido para los ángulos cuadrantales, esto es, si P se encuentra en los ejes coordenados).

1.4.- Relaciones fundamentales entre líneas de un mismo ángulo

De las definiciones dadas, surgen en forma inmediata, las siguientes relaciones fundamentales que, intentaremos, las demuestres:

I.a)

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

Demostración: (*intenta demostrar en el area punteada de mas abajo*)
....
....

I.b)

$$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

Demostración:
....
....

I.c)

$$\boxed{\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

Demostración:
....
....

II)

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Demostración:
....
....

III)

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Relación fundamental que liga el seno y el coseno de un mismo ángulo

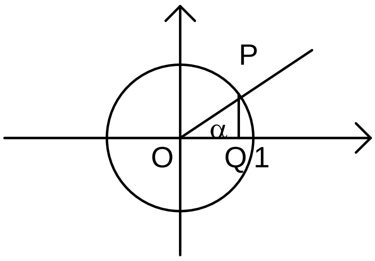
Demostración:
....
....

1.5 .-Circunferencia trigonométrica

Las relaciones que vinculan los valores de las líneas de un mismo ángulo, facilitan la determinación de esos valores.

Observemos que, de las definiciones dadas de las líneas trigonométricas, surge que las razones sólo dependen del ángulo α. En esto nos apoyaremos para utilizar un recurso que nos permita visualizar la variación de los valores de las líneas en función de la variación de los ángulos correspondientes. Consiste en construir la ***circunferencia trigonométrica***, cuyo radio es 1.

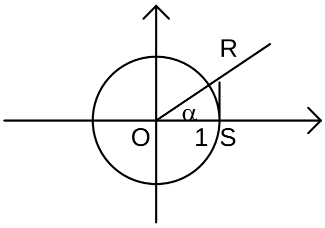
De esta manera, ρ = 1, por lo que algunas fórmulas se simplifican y, lo mejor de todo, las medidas de $\overline{OQ}$ y de $\overline{PQ}$ nos dan idea del valor del seno y coseno de α, pues:



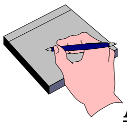
sen α = y/1 = PQ
cos α = x/1 = OQ

Por supuesto, sen α y cos α son ***números abstractos*** , pero el orden de sus magnitudes puede "visualizarse" comparando las medidas de $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$ con el segmento unitario $\overline{OP}$.

Asimismo, la tangente puede representarse con el segmento $\overline{RS}$, que resulta de intersecar la semirrecta tangente a la circunsferencia con la prolongación de $\overline{OP}$ (Véase que el triángulo OPQ es semejante al triángulo ORS.



$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{\underbrace{OS}_{1}} = RS$$



<u>Actividad 8</u>: Represente en una circunsferencia trigonométrica los segmentos que corresponden a las líneas sen α, cos α y tan α si:

a) $0 < \alpha < \pi/2$
b) $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$
c) $\pi/2 < \alpha < \pi$

1.6.- <u>Signos de las líneas</u>

De acuerdo a lo que hemos visto de las líneas para ángulos de los cuatro cuadrantes (nó cuadrantales), fácilmente podemos establecer cuáles son los signos que corresponden a las líneas trigonométricas según el cuadrante en el que se halle α.

Si α está en el I cuadrante: $0 < \alpha < \pi/2$
Si α está en el II cuadrante: $\pi/2 < \alpha < \pi$
Si α está en el III cuadrante: $\pi < \alpha < 3\pi/2$
Si α está en el IV cuadrante: $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

Ayudándote de las definiciones dadas, completa el siguiente cuadro, con los signos que corresponden (se te sugiere, en todos los casos, graficar) :

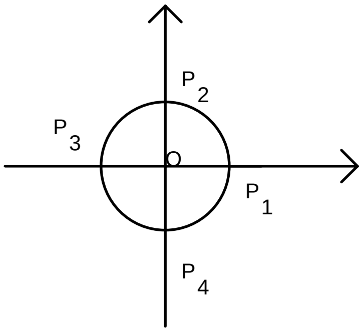
líneas/cuadrantes	I	II	III	IV
seno				
coseno				
tangente				

De acuerdo a tus resultados, habrás observado que la tangente del I y III cuadrante son positivas. ¿Cómo graficarías la tangente del II cuadrante? ¿Y la del III cuadrante? ¿Y la del IV cuadrante?

1.7.- <u>Líneas de los ángulos cuadrantales</u>

El análisis de los signos, no incluyó a los ángulos de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Llamamos *ángulos cuadrantales* a aquellos que se determinan cuando P pertenece a algún eje coordenado.

Si P toma la posición: P_1, P_2, P_3 ó P_4 (ver figura), se tiene:



en P_1:

$\text{sen } 0 = \text{sen } 2\pi = 0/1 = 0$
$\cos 0 = \cos 2\pi = 1/1 = 1$

en P_2:

$\text{sen } \pi/2 = 1/1 = 1$
$\cos \pi/2 = 0/1 = 0$

en P_3:

$\text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0/1 = 0$
$\cos \pi = \cos 2\pi = 1/1 = 1$

en P_4:

$\text{sen } 3\pi/2 = -1/0 = -1$
$\cos 3\pi/2 = 0/1 = 0$

Como vemos, no hay problemas para determinar los valores de seno y coseno de esos ángulos. Pero, las restantes líneas necesitan de una definición especial por cuanto algunos denominadores resultan nulos, obteniendo expresiones que carecen de valor numérico.

Para éstos casos, introduciremos el signo "∞ " que se lee: "infinito", no siendo ∞ un número. Cuando afirmemos que el valor de una línea es $+\infty$, debe entenderse que no es superado ese valor por ningún número. Y, afirmar que un valor es $-\infty$, debe entenderse que es más pequeño que cualquier valor numérico.

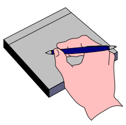
Así, tenemos que:

$\tan \pi/2 \underset{def}{=} +\infty$ $\qquad$ $\tan 3\pi/2 \underset{def}{=} \infty$

$\text{cotan } 0 \underset{def}{=} +\infty$ $\qquad$ $\text{cotan } 3\pi/2 \underset{def}{=} -\infty$

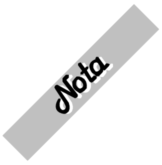
$\sec \pi/2 \underset{def}{=} +\infty$ $\qquad$ $\sec 3\pi/2 \underset{def}{=} -\infty$

$\text{cosec } 0 \underset{def}{=} = +\infty$ $\qquad$ $\text{cosec } \pi \underset{def}{=} +\infty$



Actividad 9: Toma varios valores de α en el I cuadrante, de manera que α vaya aumentando. Traza para cada uno de ellos la tangente correspondiente. ¿Qué comportamiento

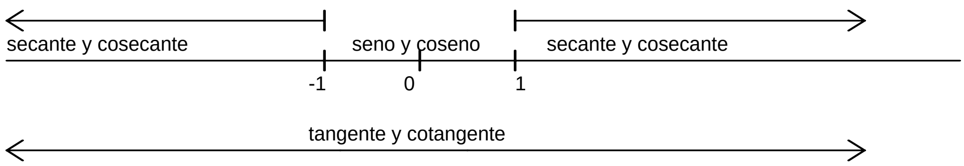
observas que tiene la tangente? ¿Puedes enunciar este resultado? ¿Qué sucede si α crece de $\pi/2$ a π?, respecto al comportamiento de la misma línea? Efectúa idénticas observaciones cuando α toma valores crecientes en los cuadrantes III y IV. (Grafica siempre)



Tal vez podrías preguntarte: ¿ En qué cuadrante considero el ángulo de 90 ° ? ¿En el I ó en el II, si está en el "límite de ambos?" Debes considerar a los ángulos cuadrantales en general, como generados desde la derecha. Esto es, el de 90° en el I, el de 180 ° en el II, 270 ° en el III y 360 ° en el IV. También para el I el de 0 °.

Por otra parte, señalemos que, mientras seno y coseno toman todos los valores comprendidos entre 1 y -1, incluidos éstos, como intuitivamente resulta del análisis de su comportamiento en la circunferencia trigonométrica, la tangente y la cotangente *pueden tomar cualquier valor real.* No así la secante y la cosecante, cuyos valores son menores o iguales que -1 o mayores o iguales que 1 (*Verifícalo).*

Podríamos, entonces representar esos conjuntos de valores en la recta real de la siguiente forma:



Actividad 10: Observa que a cada ángulo le corresponde un solo seno, un solo coseno y una sola tangente, pero que el recíproco no es cierto: dado un seno, por ejemplo: sen x = 0.5 hay más de un ángulo que tiene como valor el valor 0,5.¿Cuáles son?

Actividad 11: ¿Cuánto vale el coseno del ángulo cuyo seno es igual a su tangente?

Actividad 12: Si un ángulo está comprendido entre $\pi/2$ radianes y π radianes ($\pi/2 < x < \pi$), ¿Qué es mayor : su seno o su coseno?

Actividad 13: : Dado tan x = 2, calcula sen x y cos x.

Actividad 14: Dado cos α = - 0.5, calcula sen α y tan α.

Actividad 15: Dado sen β= -0.5, calcula cos β y y tan β.

Actividad 16: ¿Qué relación debería existir entre el seno y el coseno de un ángulo para que su tangente fuese mayor que 1?

Actividad 17: Dibuja los ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima el valor de sus razones trigonométricas:

a) sen α = - 1/2 ; tan α > 0 , b) tan β = -1 ; cos β < 0

Actividad 18: Determina si existe un ángulo x en el cuadrante que en cada caso se da, que satisfaga las condiciones señaladas. Y, en caso positivo, dibujarlo:

a)	cos x = 0.5	I cuadrante
b)	tan x = -3/4	I cuadrante
c)	sen x = -3/4	II cuadrante
d)	sen x = 3/4	II cuadrante
e)	tan x = 4/3	III cuadrante
f)	sen x = -3/4	IV cuadrante
g)	cosec x = 0.4	I cuadrante

Actividad 19: Comprueba, utilizando el círculo unitario que dos ángulos suplementarios tienen los senos iguales y los cosenos y tangentes opuestos.(Dos ángulos suplementarios si su suma es 180° m: $\alpha + \beta = 180\,°$, ó, $\alpha = 180\,° - \beta$).

Actividad 20: Comprueba gráficamente que los ángulos opuestos tienen los cosenos iguales y los senos y tangentes opuestos. Es decir:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Actividad 21: ¿Te parece que los resultados obtenidos en la actividad anterior, son válidos, si α es un ángulo del II cuadrante? ¿Y del III? ¿Y del IV?

Actividad 22: Si un ángulo x pertenece al I cuadrante, ¿a qué cuadrante pertenece π+x? ¿y π-x?

Comprueba gráficamente que:

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\, x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

Actividad 23: El seno de un ángulo, ¿puede tomar los valores : 3/7, -1, - 7/3, 0 , $+\infty$, $-\infty$, 4.11 , 0.123, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, ln 5 , $\pi/4$?

Actividad 24: Sabiendo que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\beta + \text{sen}\,\beta \,.\, \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$$

se te solicita obtener:

a) sen (2α)	d) cos ($\alpha + \beta$)
b) cos (2α)	e) sen ($\alpha + \beta$)
c) tan (2α)	f) tan ($\alpha - \beta$)

Actividad 25: Probar que $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\ \text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right].\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$

(Ayuda: sustituir: $\alpha = u + v$ y $\beta = u - v$)

Actividad 26: Utilizando las relaciones fundamentales, verifica la validez (o nó) de las siguientes igualdades:

a) $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

b) $\dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen } x}$

c) $(\text{sen } \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \text{sen } \alpha)^2 = 2$

d) $\tan x + \tan y = \dfrac{\text{sen}(x + y)}{\cos x . \cos y}$

e) $\tan (x + 45°) . \tan (x - 45°) = -1$

f) $\tan^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x . \tan^2 x$

g) $\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x}$

h) $1 + \text{sen}\alpha \tan \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha + \text{cotan } \alpha}{\text{cotan } \alpha}$

i) $\dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\text{sen}\alpha + \cos\beta}{\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta}$

j) $\sqrt{\dfrac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x}} + \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}} = 2 \sec x$ (con $0 < x < \pi/2$)

Actividad 27: ¿Es verdadera la afirmación: "$\dfrac{\text{sen } x + \text{tg } x}{\cos x + \text{cotg } x}$ no puede tomar valores negativos"? Justifica la respuesta.

Actividad 28 : Calcula sen α y cos α en cada uno de los siguientes casos:

a) $\tan \alpha = -2$ y $\alpha \in$ II cuadrante
b) $\tan \alpha = 4$ y $\alpha \in$ III cuadrante
c) $\tan \alpha = -2$ y $\alpha \in$ IV cuadrante

Actividad 29: Las razones trigonométricas del ángulo de 75 ° son:

sen 75 ° = 0.97; cos 75 ° = 0.26 ; tan 75 ° = 3.73.

Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de -75 °.

Actividad 30: Calcula las razones trigonométricas de 150 ° utilizando las razones del ángulo de 30 °.

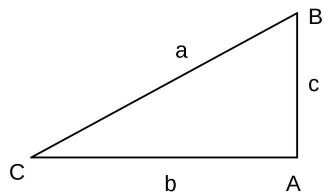
Actividad 31: ¿En cuánto deben diferir dos ángulos para que sus tangentes coincidan?

2.- Resolución de triángulos

2.1.- Resolución de triángulos rectángulos:

Con los contenidos ya desarrollados y propiedades de la geometría elemental relativas a determinación de triángulos se sabe que conociendo dos elementos de un triángulo rectángulo, de los cuales uno al menos debe ser lado, pueden determinarse los restantes elementos.

Por ejemplo, sea dado el triángulo de la figura:



$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos\hat{C}}$$

y $$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos\hat{B}}$$

de donde, puede inferirse que:

a) La hipotenusa es igual al cociente entre un cateto y el seno del ángulo opuesto a éste, o el coseno del ángulo comprendido entre esos dos lados.

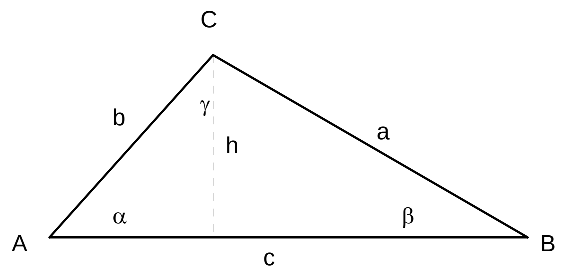
b) Cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto, o por el coseno del ángulo adyacente; y también al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al cateto dado.

2.2.- Resolución de triángulos oblicuángulos

¿Qué pasa si el triángulo no es rectángulo?

Si el triángulo no es rectángulo, deduciremos dos resultados básicos que podremos aplicar para resolverlo.

Si consideramos un triángulo cualquiera ABC , el cual tiene una altura h con respecto al lado AB (ver figura):



Por las definiciones dadas, se tiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a\ \text{sen}\ \beta$$

e igualando estos valores de h :

$$b\ \text{sen}\ \alpha = a\ \text{sen}\ \beta$$

o también:

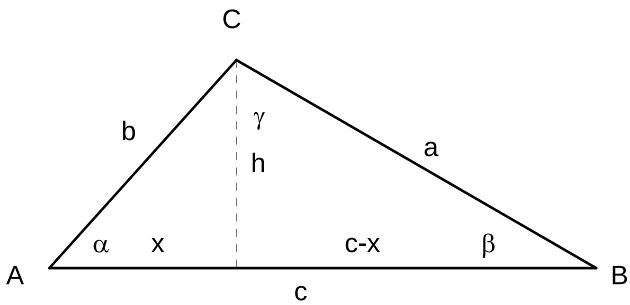
$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{a} = \frac{\text{sen}\ \beta}{b}$$

Para la construcción dada, a esta relación la podemos hacer para cualquiera de sus tres ángulos. Así tenemos que:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}}$$

relación que conoce con el nombre de ***Teorema del seno*** .

Por otra parte, dado el mismo triángulo ABC:



Por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \qquad (*)$$

y, como:

I) $\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b\ \text{sen}\ \alpha$

II) $\cos \alpha = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b\ \cos\ \alpha$

Reemplaza esos valores de h y x en (*):

....

Ahora opera esa expresión, reduciéndola en todo lo posible:

....

....

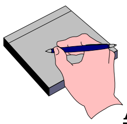
....

A la expresión final colócala en el recuadro:

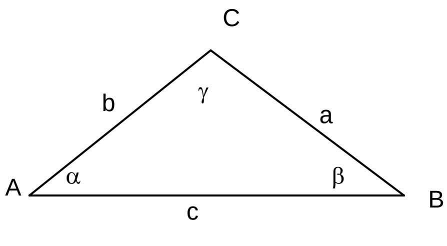
Intercambiando los roles de A, B y C, obtenemos las siguientes identidades similares, que pueden enunciarse con el nombre del ***Teorema del coseno.***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

Te hacemos observar que, aunque se ha tomado un ángulo agudo, la demostración es similar si no lo es, llegándose al mismo resultado.



<u>Actividad 32 :</u> Utilizando los elementos del triángulo ABC calcula lo que se te pide, en cada caso:



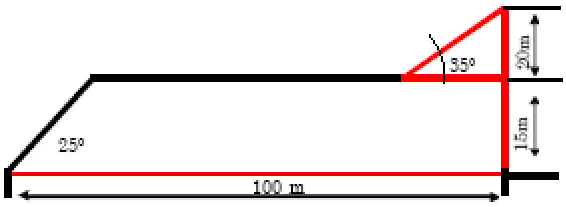
a) $a = 7$; $b = 9$; $\gamma = 60°$; $c = ?$

b) $c = 1.2$; $a = 1.7$; $\beta = 120°$; $b = ?$

c) $a = 80$; $b = 57$; $c = 61$; $\beta = ?$

<u>Actividad 33</u>: En un triángulo rectángulo ABC conocemos $\alpha = 50^{o}$ y el lado BC = 7 cm. Calcula los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. (Dibuja el triángulo libremente, pero respetando que es rectángulo en B).

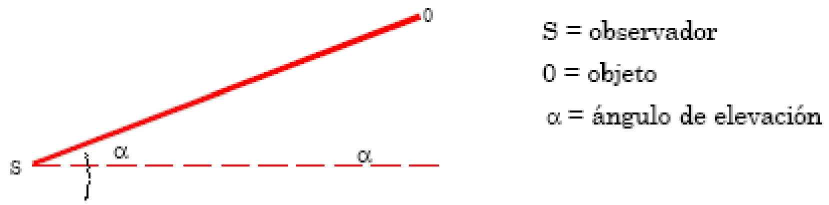
<u>Actividad 34</u>: Se requiere diseñar un tobogán según la gráfica, calcular la longitud del tobogán, que cumple las especificaciones dadas.



Actividad 35: Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 50° con el suelo.

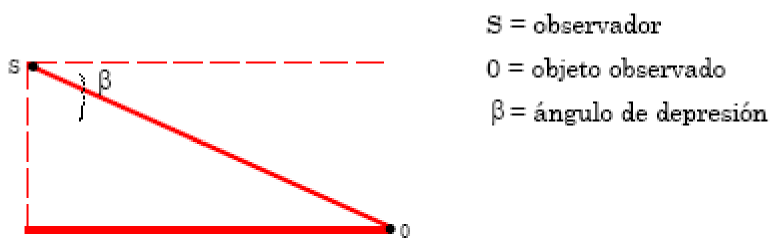
Actividad 36: En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 cm. y los ángulos iguales miden 70°. Calcula su área y su perímetro.

Actividad 37: Cuando un observador ubicado en un punto dado, observa un objeto que está a mayor altura que el, el ángulo formado entre la visual y la horizontal se le llama ángulo de elevación.



Un observador está a 50metros de una iglesia. El ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25º, ¿cuál será la altura de la iglesia? el observador mide 1,70 m.

Actividad 38: El ángulo de depresión es el formado por la visual y la horizontal, cuando el observador està a mayor nivel del objeto observado. Véase el dibujo:



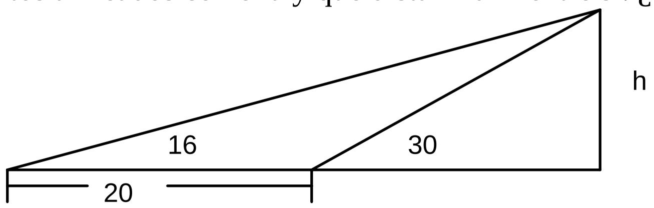
Si un futbolista está a 3,15 metros de la pelota, con un ángulo de depresión de 30º, ¿cuál es la estatura del futbolista?

Actividad 39: Un árbol proyecta una sombra de 16,75 m cuando el ángulo de elevación es de 32º. Calcular al altura del árbol.

Actividad 40: Desde un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mas el ángulo de depresión de un barco es de 55 º.¿A qué distancia del faro se halla el barco?

Actividad 41: Para medir la altura a la que se encuentra un satélite de observación, se han elegido dos puntos A y B, que distan entre sí 1.200 km. de tal manera que el satélite se encuentra encima de algún punto entre A y B. El ángulo de elevación del satélite cuando se lo observa desde A es 51 ° y desde B es 76 °. ¿A qué altura se encuentra el satélite?

Actividad 42: Para calcular la altura h de un edificio se han medido, según indicamos en la figura, los ángulos de 16 ° y 30 ° que forman con la horizontal las visuales dirigidas a su puntos más alto desde dos puntos alineados con ella y que distan 20 m entre sí. ¿Cuál es un altura?



Actividad 43: Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del Sol con el horizonte?

Actividad 44: Un salvavidas está en su torre de observación a 20metros de altura, una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35º. ¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?

Rta: d = 28,56 metros

Actividad 45: Un poste de 35 metros de altura debe ser apoyado por un alambre que se fija a tierra. Si el alambre forma un ángulo de 52º con la horizontal, ¿cuál será la longitud del alambre?

Rta: 44,42 metros

Actividad 46: Una persona de 1,62 metros; proyecta su sombra de 1,15 metros a lo largo del suelo ¿cuál será el ángulo de elevación del sol sobre la sombra?

Rta: a = 54,63º

Actividad 47: Un cohete se dispara y éste sube a un ángulo constante de 70º hasta llegar a una distancia de 12.000 metros, ¿qué altitud alcanzó el cohete?

Rta: h = 11.276, 31 metros

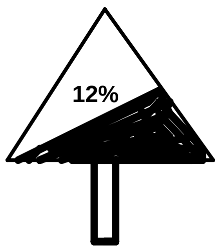
Actividad 48: El pentágono en los EEUU, tiene forma de pentágono regular; cuyo lado mide 921 pies, ¿cuál será el área del pentágono? (de el resultado en pies^2 y tradúzcalo a m^2.

Rta: A = 1´459.379 pies2

Actividad 49: De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide 45 ° y uno de los catetos 5 cm. ¿ cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?

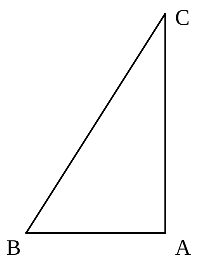
Actividad 50: Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

Actividad 51: Al ir por una ruta nos encontramos con la siguiente señal de tráfico:

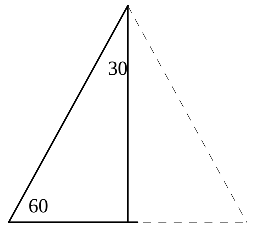


Significa que por cada 100 m recorridos, el desnivel aumenta 12 m. ¿Qué ángulo forma la ruta con la horizontal? Si recorremos 538 m, ¿cuántos metros habremos subido en vertical?

Actividad 52: En un triángulo rectángulo ABC conocemos B=50 ° y el lado BC = 7 cm . Calcula los lados AB y AC.



Actividad 53: En un triángulo rectángulo con un ángulo de 60 °, observa que, por simetría, puedes completar un triángulo equilátero; luego el cateto contiguo vale la mitad de la hipotenusa. Por tanto, cos 60 °= 1/2 . Calcula sen 60 ° y tan 60 °.



Actividad 54: Resuelve los triángulos rectángulos dados:

b) dados el cateto b = 150 m y el ángulo adyacente al mismo $\beta = 45°$
c) dados sus catetos de longitudes 43 m y 75.5 respectivamente.

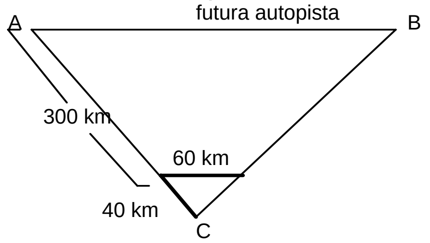
Actividad 55: Calcula la superficie de un campo rectangular sabiendo que un alambrado que lo atraviesa diagonalmente tiene una longitud de 649 metros y forma con uno de los lados limítrofes un ángulo de 37 ° 26'.

Actividad 56: Para hallar las dimensiones de un pantano, un topógrafo hace las mediciones que se muestran en la figura. Los segmentos AC y BC son perpendicular.
Con A= 24° y AC = 350 m., deduce la distancia BC a través del pantano.

Actividad 57: Estás ante esta situación:

Deseas conocer la anchura de un río y la altura del árbol en la orilla opuesta. Tienes aparatos para medir distancias y para medir ángulos, pero no puedes cruzar el río y, además la orilla es escarpada y sólo puedes moverte perpendicularmente al río donde hay un camino. ¿Cómo lo harías?

Actividad 58: Un político tiene que ir a dos pueblos A y B para realizar su campaña electoral. El vive en la capital C que dista 300 Km del pueblo A. Su campaña la basa fundamentalmente en anunciar la futura autopista que unirá el pueblo A con el pueblo B y, para que den crédito a sus palabras, les dice que ya se han conseguido 40 Km de autopista desde la capital en dirección al pueblo A y, desde este punto se ha hecho ya una autopista de 60 Km que será totalmente paralela a la futura autopista que une A con B. ¿Cuántos kilómetros tendrá esta autopista?



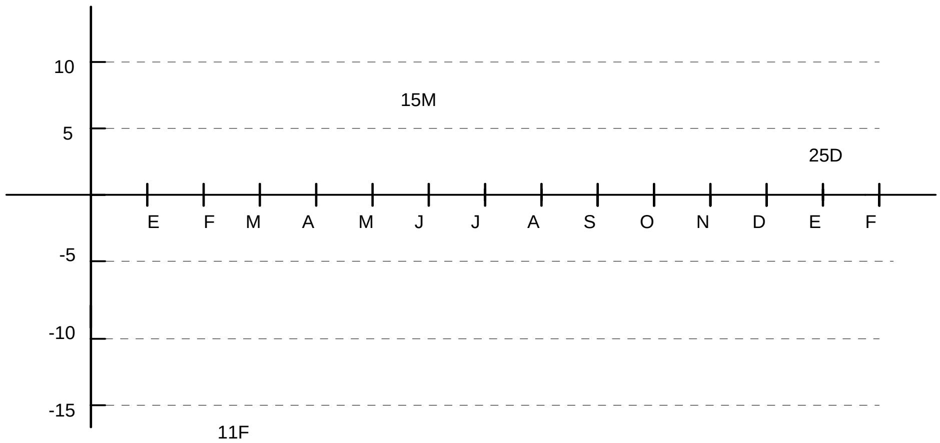
3.- Funciones trigonométricas o circulares

Entre las grandes utilidades de las funciones, está el que- por medio de ellas- se puede expresar el cambio que se produce en las cosas a través del tiempo. Muchísimos fenómenos pueden expresarse mediante funciones y de muchos otros es motivo de investigación el descubrir cual es la ley que los vincula con el tiempo.

Cuando dibujamos una función, ésta nos brinda información sobre el comportamiento de ese fenómeno. En particular, intentaremos representar mediante gráficos las funciones circulares o trigonométricas (seno, coseno y tangente), a partir de las cuales fácilmente podremos deducir su comportamiento periódico a lo largo del eje $\dot{x}$.

Los invitamos a analizar el siguiente ejemplo (extraído del *Matemáticas*- de M. de Guzmán- Cólera- Salvador).

Un reloj de sol no es exacto debido a que la Tierra en un movimiento alrededor del Sol, no va siempre a igual velocidad. La siguiente gráfica muestra cuántos minutos se adelanta o se atrasa el reloj de sol en el transcurso de un año.



¿En qué fecha el reloj de sol adelanta más? ....

¿En qué fecha se retrasa más? ....

¿En qué fechas no se adelanta ni retrasa? ....

¿Qué pasará el año siguiente? ¿Y el otro? ....

Como habrás observado, este comportamiento se repite cada año. Luego, la gráfica corresponde a una ***función periódica,*** siendo su período: un año**.**

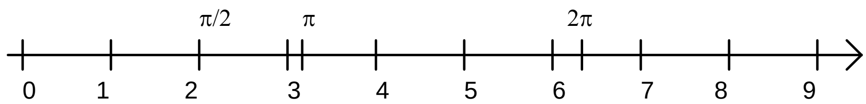
¿Qué es entonces una función periódica? Intenta definirla

....
....

Debemos advertirte que el comportamiento de los fenómenos físicos reales no suelen ser *estrictamente* periódicos (nada de lo que existe en la naturaleza puede considerarse que responde a una ley exacta); no obstante, puede observarse en muchos de ellos "cierta" periodicidad que permite prever cuál será su comportamiento dentro de un lapso de tiempo determinado.

Ahora bien, centrando nuestra atención en lo que nos ocupa, ¿ cómo se representan las funciones del seno, coseno y tangente de manera que nos permita su variación al variar el ángulo?

En primer lugar, debemos observar que utilizando el sistema de medición de ángulos por radianes, cada ángulo α está representado por un número x, con $0 \leq x < 2\pi$,



y recíprocamente, cada número x de $[0,2\pi)$ representa un ángulo.

A partir de esto, podemos definir las ***líneas trigonométricas sobre números***.

Consideremos en primer lugar, la ***función seno****:*

$$\boxed{f(x) = \text{sen } x}$$

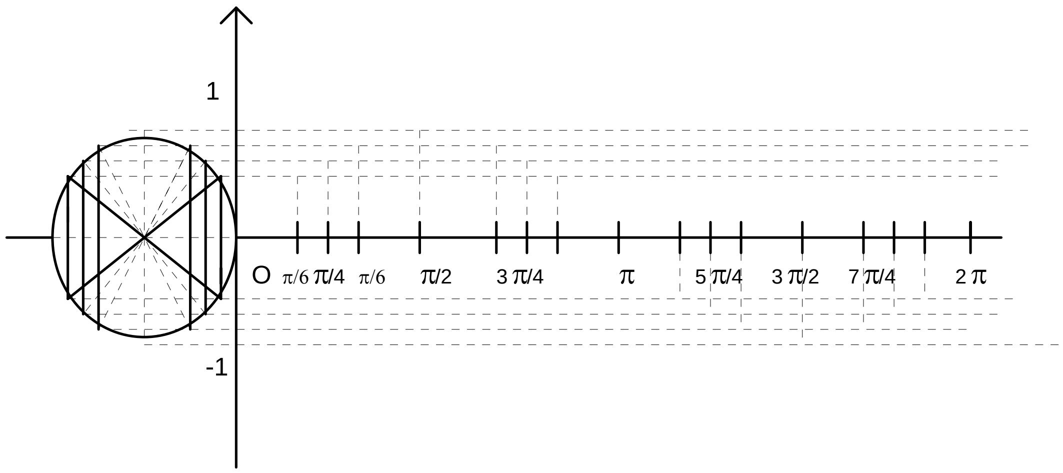
Esta es una función real, cuyo *dominio* es **R** :

D(f) = **R**,   pues el dominio está formado por todos aquellos elementos para los cuales existe imagen.

¿ Cuál es e*l rango*? Para hallarlo debemos tener presente que los valores de seno no superan a 1 ni son menores que -1, esto es: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, por lo cual:

R(f) = [-1, 1]

Vamos a construir ahora esta función, relacionando la medida de un ángulo expresada en radianes con el valor de su seno. Para obtenerla, procederemos de la siguiente manera: a la izquierda del eje de coordenadas, dibujaremos un círculo trigonométrico de manera que nos permita visualizar rápidamente los valores del seno para distintos valores de ángulos, y transportar esos valores para obtener las imágenes correspondientes. Así se construye la siguiente figura en la que solicitamos unas los puntos obtenidos de esa manera:



El trazo que has dibujado, corresponde al de la ***función seno, en el intervalo*** *[0, 2 π]*.

Análogamente se puede construir las funciones coseno y tangente, Si has comprendido el procedimiento, intenta realizarlas (entre $0 \leq x \leq 2\pi$). Si has comprendido el procedimiento, intenta realizarlas

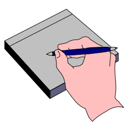
f(x) = cos x   ,   f(x) = tan x

Como podemos observar, las funciones seno y coseno, son funciones que están acotadas entre 1 y -1 (el conjunto de sus imágenes no superan a 1 ni son menores que -1).

Se te pregunta: está acotada la función tangente?

....

Justifica la respuesta.



<u>Actividad 59:</u> Se te solicita que, teniendo en cuenta las gráficas anteriores, describas la curva:

a) f(x) = sen x para valores de x, fuera del intervalo [0, 2 π)
b) f(x) = cos x para valores de x, fuera del intervalos [0, 2 π)
c) f(x) = tan x para valores de x, fuera del intervalos [0, 2 π)

<u>Actividad 60</u>: ¿Estás en condiciones de determinar los períodos de las funciones seno, coseno y tangente?

<u>Actividad 61</u>: ¿Cuáles son todos los ángulos que verifican que tan x = 1?

<u>Actividad 62</u>: ¿Cómo podrías expresar los ángulos para los cuales tan x no está definida?

Actividad 63: Superpone en un gráfico las funciones: sen x y cos x ¿Puedes afirmar que una es una traslación de la otra? Si es así, ¿Cuánto tienes que trasladar la función coseno para obtener la función seno? Utilizando el círculo trigonométrico, verifica que efectivamente:

$$\text{sen } x = \cos(\pi/2 - x)$$

Actividad 64: Dibuja las siguientes funciones en un mismo gráfico (sería conveniente que cada curva la trazara con un color distinto):

a) $f(x) = \text{sen } x$
b) $g(x) = 2 \text{ sen } x$
c) $h(x) = (1/2) \text{ sen } x$
d) $k(x) = - \text{sen } x$
e) $l(x) = - 3 \text{ sen } x$

Las curvas que has representado, tienen la forma: $f(x) = k \text{ sen } x$, con $k \in \mathbf{Z}$
¿Puedes explicar cuál es el comportamiento de la función seno, cuando a ésta se la multiplica por una constante?

Actividad 65: Dibuja las siguientes funciones en un mismo gráfico:

a) $f(x) = \text{sen } x$
b) $g(x) = \text{sen } (x + \pi/2)$
c) $h(x) = \text{sen } (x - \pi/4)$
d) $l(x) = \text{sen } (x + 2\pi)$

Las curvas que has representado, tienen la forma: $f(x) = \text{sen } (x + \alpha)$. ¿Puedes explicar cuál es el comportamiento de la función seno, cuando a su argumento (x) se le adiciona un cierto ángulo? ¿Qué pasa si el argumento es multiplicado por un cierto valor mayor que 1 en valor absoluto? ¿Y menor que 1 en valor absoluto?

Actividad 66: Dibuja las siguientes funciones en un mismo gráfico :

a) $f(x) = 2 + \text{sen } x$
b) $g(x) = 1- \text{sen } x$
c) $h(x) = 3 + \text{sen } x$
d) $l(x) = -2 - \text{sen } x$

Las curvas que has representado, tienen la forma: $f(x) = a \pm \text{sen } x$. ¿Puedes explicar cuál es el comportamiento de la función seno, cuando se le adiciona un cierto número real?

Actividad 67: ¿En qué casos la función seno tiene período mayor que 2π ? ¿Cuándo menor que 2π?
